

ARIMA(0,1,1)帰無仮説対ARIMA(1,0,1)対立仮説に関する単位根検定の小標本特性[†]杉 原 左右一^{††}

We conduct a small Monte Carlo simulation to find empirical percentiles and powers of unit root test for ARIMA(0,1,1) null hypothesis against ARIMA(1,0,1) alternatives using instrumental variable method. We found numerically that empirical powers become remarkably small when near MA unit root exists.

KEY WORDS : ARIMA model, near MA unit root, instrumental variable method, empirical percentile point, empirical power.

I はじめに

周知の様に、攪乱項が定常過程に従うランダムウォークモデルに関しては、既に多数の単位根検定方法が提示されている。本稿では、中でも特に攪乱項がMA(1)過程に従うランダムウォークモデルを考え、所謂、操作変数推定量をもとにした単位根検定方式について、特にその小標本時の統計的諸性質をモンテカルロシミュレーションを実施して考察することを目的としている。以下、先ずII、IIIで本稿のモデルと仮定並びに操作変数推定量とその極限分布について述べる。次にIVで小規模なモンテカルロシミュレーションを実施し、操作変数推定量を用いた単位根検定統計量についてその分布の経験的パーセント点と経験的検出力を数値的に求め、その特性について考察する。最後にVは本稿のまとめである。

II モデルと仮定

t を時点を表わす変数とし、次式で表わされるモデルを考える。

$$(1) \quad \begin{aligned} y_t &= \rho y_{t-1} + u_t \\ u_t &= \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \quad t=1, 2, \dots, T \end{aligned}$$

上記モデルに次の仮定1～3を仮定する。

仮定1 $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$

仮定2 $|\theta| < 1$

仮定3 $y_0 = 0$

特に $\rho = 1$, $\rho = 0$, $|\rho| < 1$ に対応して上記モデルはそれぞれARIMA(0,1,1), ARIMA(0,0,1), ARIMA(1,0,1)モデルとなる。

また、特に $\rho = 1$, $\theta = -1$ の場合、上記モデルは $\Delta y_t (= y_t - y_{t-1})$ がMA単位根をもって変動することを意味しているが、この場合、モデルは識別不能となる。本稿では $\theta = -1$ を排除するとともに、モデルの反転可能性を保証するために仮定2を設定することにする。特に以下で注意しなければならないのは $\rho = 1$, $\theta = -1$ の場合であり、本稿ではこれを“ Δy_t が近似的MA単位根を持つ場合”と呼ぶことにする。

仮定3についてはこれに代わって初期値 y_0 にある分布を想定することも可能であるが、単純化のために本稿では仮定3を設定することにする。

[†] Small Sample Properties Of Unit Root Test For ARIMA(0,1,1) Null Hypothesis Against ARIMA(1,0,1) Alternatives.

^{††} 関西学院大学商学部教授

本稿では、以下、帰無仮説 $H_0: \rho = 1$ (ARIMA(0,1,1)モデル)、対立仮説 $H_1: \rho < 1$ (ARIMA(1,0,1)モデル)の仮説検定を中心

に考察することにする。一例として、正規乱数を用いて $\rho = 0.9, 1, \theta = -0.8, 0, 0.8, \sigma_\varepsilon^2 = 1, T = 500$ の y_t のグラフを図1、2に示す。

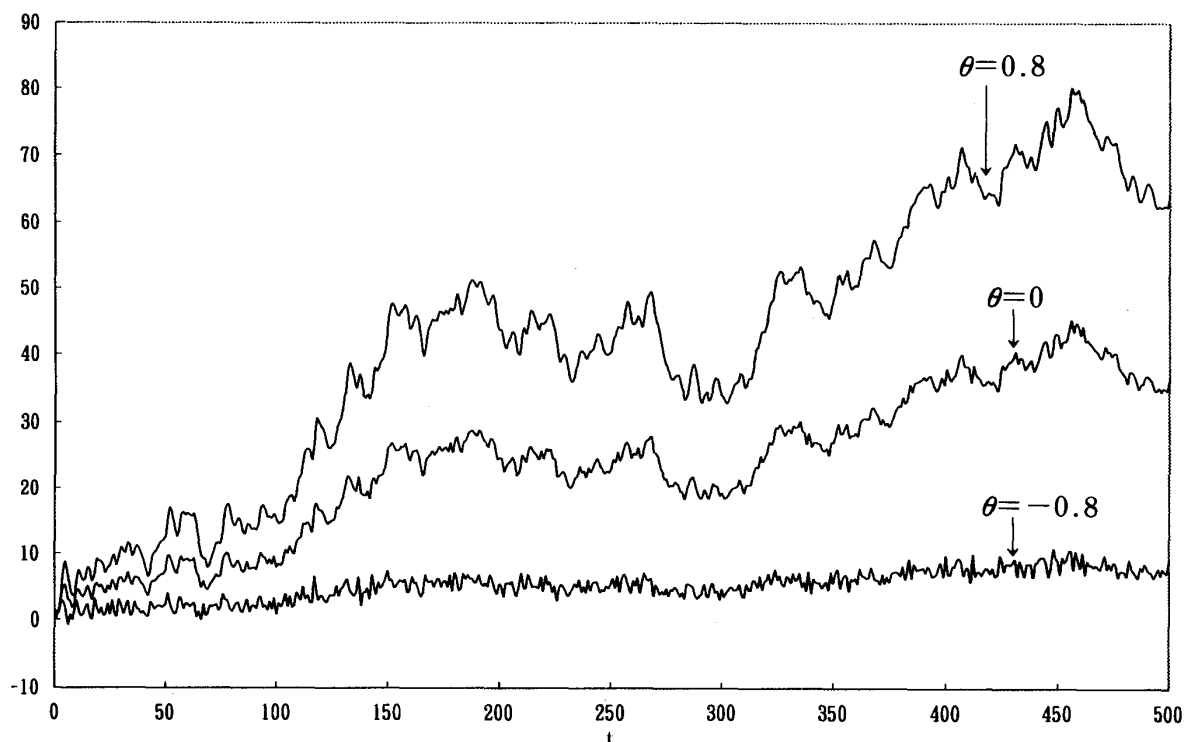


図1 $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$ のグラフ ($\rho = 1, \theta = -0.8, 0, 0.8, \sigma_\varepsilon^2 = 1, T = 500$)
 $u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

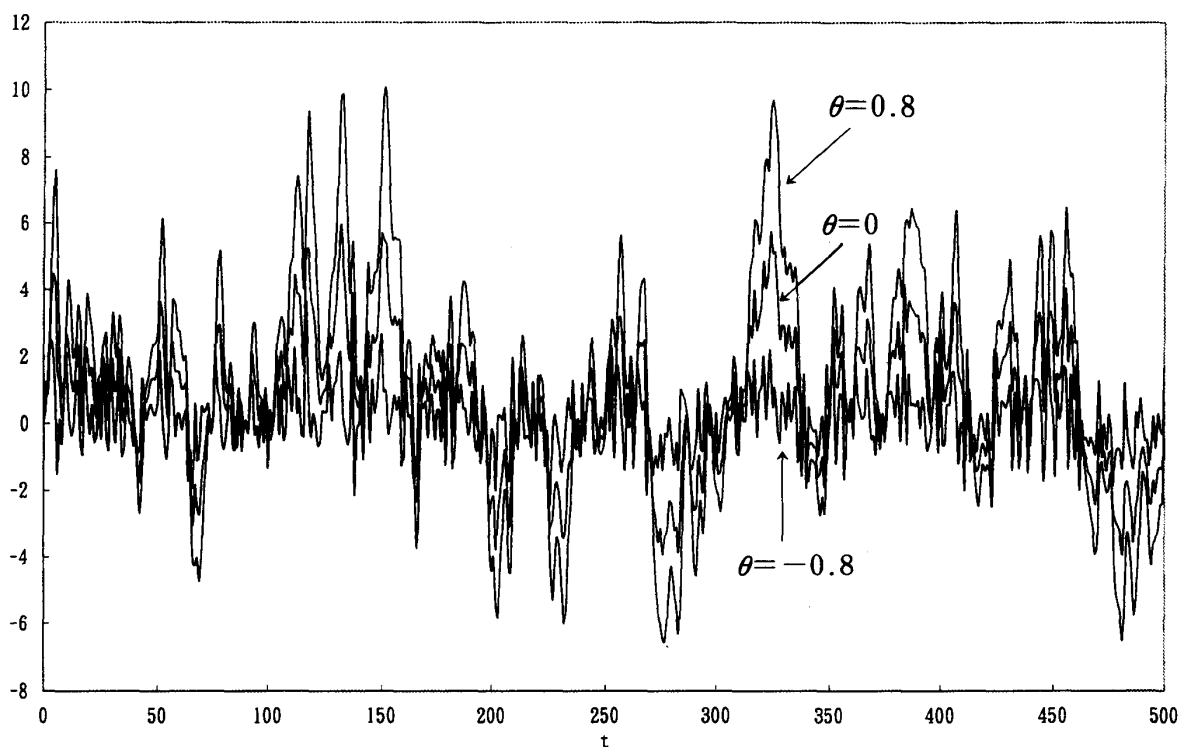


図2 $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$ のグラフ ($\rho = 0.9, \theta = -0.8, 0, 0.8, \sigma_\varepsilon^2 = 1, T = 500$)
 $u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

III ρ の操作変数推定量とその極限分布

u_t がMA過程に従うため、 ρ の推定は通常極めて複雑なものとならざるを得ないが、特に y_{t-k} ($k \geq 2$) を操作変数 (Instrumental Variable) とする操作変数法を用いれば、その推定を比較的容易に行うことが出来る。本稿では、以下、 $k=2$ とし、 y_{t-2} を操作変数に用いた次式で表わされる ρ の操作変数推定量 $\hat{\rho}_V$ を考えることにする。

$$(2) \hat{\rho}_V = \frac{\sum_{t=2}^T y_t y_{t-2}}{\sum_{t=2}^T y_{t-1} y_{t-2}}$$

帰無仮説 $H_0: \rho = 1$ の下で、 $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の $T \rightarrow \infty$ のときの極限分布は次式で与えられる。

$$(3) T(\hat{\rho}_V - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 w(r) dw(r)}{\int_0^1 w(r)^2 dr}, \text{ as } T \rightarrow \infty$$

ここで、 $w(r)$ は $[0,1]$ 上で定義された標準ウィナー過程である。

Hall (1989) が指摘している様に、(3) 式右辺の極限分布は、所謂 augmented Dikey-Fuller ρ 検定量や Phillips-Perron ρ 検定量の極限分布と一致している¹⁾。

IV $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の経験的パーセント点と経験的検出力

$T(\hat{\rho}_V - 1)$ の極限分布は前節の如く与えられるが、すでに Hall (1989) によって言及されているとはいえ、筆者の知る限り、特に小標本時における $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の経験的検出力の数値的特性については未だ十分に知られていないように思われる。そこで本稿では、モンテカルロシミュレーションを実施して、 $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の分布の経験的 α パーセント点と経験的検出力を数値的に求めるとともに、特に Δy_t が近似的MA単位根を持つ場合の性質について考察することにしたい。以下では、極めて小規模ではあるが、 $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ とし、 $\theta = -0.8, 0, 0.8$, T

$= 20, 50, 100$ の各場合について正規乱数を用いて反復回数10,000のモンテカルロシミュレーションを実施した結果を報告する。

まず一例として、 $T=50$, $\theta = -0.8, 0, 0.8$ の場合について帰無仮説 $H_0: \rho = 1$ の下での $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の分布の形状を示せば図3～5の様になる。また分布の経験的 α パーセント点 ($\alpha = 0.01, 0.025, 0.5, 0.1, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99$) については、 $T=20, 50, 100$ のそれぞれについて反復回数10,000のシミュレーションを3回実施し、帰無仮説 $H_0: \rho = 1$ の下での $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の値を求めその中央値を用いることにし、得られた数値結果を表1に示す。

まずこれらの図表より、特に $\theta = -0.8$ の場合の $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の分布の形状と分布の α パーセント点が他の $\theta = 0, 0.8$ の場合とは著しく異なっていることが読み取れよう。

以上の結果をもとに、次に $\rho = 0.99, 0.98, 0.96, \dots, 0.82, 0.80$, $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$, $\theta = -0.8, 0, 0.8$, $T = 20, 50, 100$ の各組合わせについて反復回数10,000のシミュレーションをもとにした $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の経験的検出力の数値結果を表2に示す。また一例として、特に $\alpha = 0.05$, $\theta = -0.8, 0, 0.8$ の場合について $T(\hat{\rho}_V - 1)$ の経験的検出力をグラフ化したものを図6～8に示す。

これらの図表よりも明らかな様に、特に $\theta = -0.8$ の場合の検出力は他の $\theta = 0, 0.8$ の場合に比べて著しく低いことが分かる。なお、この特徴は図1, 2で示されたシミュレーションからも視覚的に理解出来よう。

本稿では紙幅の関係もあり、 θ が負の場合として特に $\theta = -0.8$ の場合しか取り扱っていないが、 θ がさらに -1 に近付き、 Δy_t が近似的MA単位根を持つにつれて、経験的パーセント点と経験的検出力に関する上記の特徴がより顕著なものとなることを指摘しておきたい。特に本稿のモンテカルロシミュレーションにより数値的

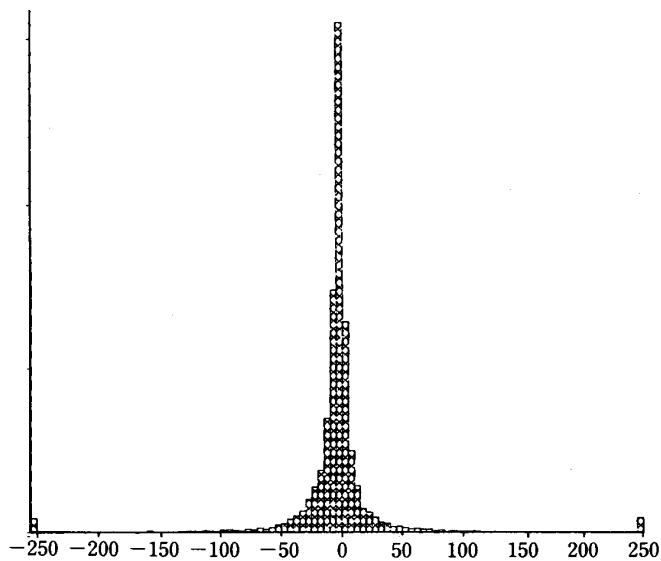


図3 $T(\hat{p}_v - 1)$ の頻度グラフ ($\theta = -0.8$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $T = 50$)

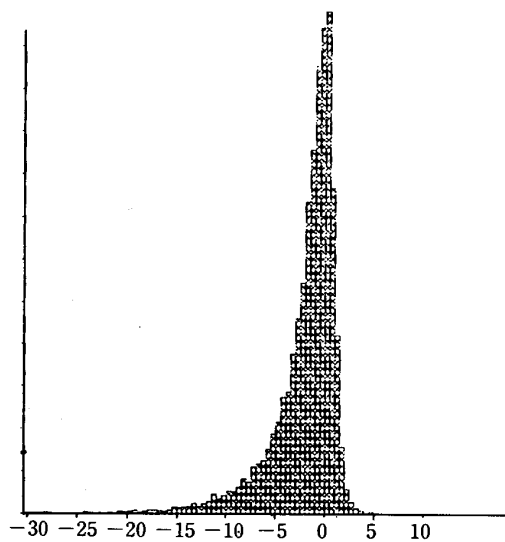


図4 $T(\hat{p}_v - 1)$ の頻度グラフ ($\theta = 0$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $T = 50$)

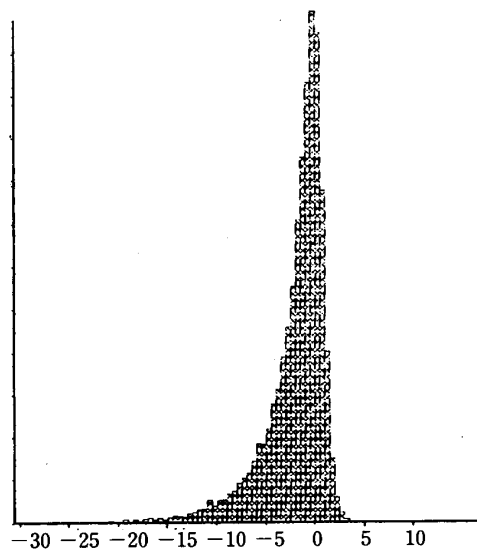


図5 $T(\hat{p}_v - 1)$ の頻度グラフ ($\theta = 0.8$, $\sigma_\epsilon^2 = 1$, $T = 50$)

表1 $T(\hat{\rho}_v - 1)$ の経験的パーセント点 ($\sigma_e^2 = 1$)

θ	α	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
-0.8	20	-214.969	-97.6759	-54.3391	-30.0285	14.4867	36.6138	87.1963	222.102
	50	-224.842	-90.4598	-45.0827	-22.8576	16.4777	38.0298	77.7195	231.914
	100	-72.3833	-44.4799	-28.7859	-16.9579	14.1787	27.6054	49.3770	103.523
0	20	-17.3333	-12.1367	-9.02121	-6.21322	1.24711	1.76821	2.32484	3.31034
	50	-14.8137	-11.1313	-8.47404	-5.83878	1.02108	1.44221	1.82509	2.34374
	100	-13.8584	-10.5927	-8.16101	-5.79705	0.99578	1.34252	1.67363	2.13161
0.8	20	-15.3314	-11.4303	-8.66410	-6.14280	1.13217	1.54089	1.95658	2.57650
	50	-14.4082	-10.7562	-8.19803	-5.90722	1.00015	1.40909	1.75714	2.21241
	100	-13.7211	-10.5584	-8.12290	-5.79424	0.97674	1.33073	1.66254	2.08961

表2 $T(\hat{\rho}_v - 1)$ の経験的検出力 ($\sigma_e^2 = 1$)

α	θ	ρ	0.99	0.98	0.96	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86	0.84	0.82	0.80
0.01	-0.8	20	0.012	0.014	0.014	0.019	0.017	0.019	0.023	0.023	0.024	0.027	0.028
		50	0.014	0.015	0.022	0.032	0.039	0.049	0.057	0.069	0.075	0.081	0.089
		100	0.017	0.026	0.055	0.103	0.165	0.246	0.327	0.409	0.482	0.541	0.578
	0	20	0.010	0.011	0.013	0.016	0.019	0.023	0.027	0.033	0.040	0.047	0.054
		50	0.013	0.016	0.026	0.039	0.054	0.078	0.105	0.141	0.181	0.224	0.275
		100	0.016	0.025	0.054	0.109	0.194	0.311	0.441	0.571	0.688	0.779	0.852
	0.8	20	0.010	0.011	0.013	0.017	0.019	0.023	0.029	0.034	0.040	0.047	0.055
		50	0.013	0.016	0.025	0.038	0.055	0.077	0.107	0.139	0.181	0.227	0.285
		100	0.016	0.023	0.055	0.109	0.198	0.318	0.458	0.592	0.718	0.815	0.888
	0.05	20	0.055	0.062	0.071	0.084	0.095	0.105	0.116	0.122	0.133	0.140	0.145
		50	0.065	0.080	0.118	0.165	0.216	0.269	0.329	0.383	0.432	0.470	0.501
		100	0.081	0.117	0.201	0.298	0.386	0.462	0.526	0.583	0.633	0.670	0.694
	0	20	0.056	0.060	0.073	0.088	0.102	0.119	0.137	0.156	0.179	0.199	0.224
		50	0.065	0.079	0.118	0.166	0.223	0.291	0.367	0.449	0.525	0.599	0.665
		100	0.076	0.114	0.232	0.397	0.573	0.724	0.841	0.912	0.954	0.976	0.988
	0.8	20	0.055	0.059	0.073	0.086	0.102	0.120	0.139	0.160	0.181	0.204	0.229
		50	0.067	0.082	0.121	0.175	0.235	0.309	0.395	0.480	0.565	0.645	0.718
		100	0.077	0.114	0.234	0.407	0.585	0.745	0.862	0.935	0.970	0.989	0.996
0.1	-0.8	20	0.113	0.124	0.143	0.168	0.192	0.213	0.235	0.253	0.273	0.294	0.308
		50	0.128	0.155	0.222	0.294	0.366	0.432	0.494	0.544	0.583	0.612	0.640
		100	0.153	0.208	0.323	0.411	0.480	0.537	0.586	0.630	0.668	0.699	0.718
	0	20	0.110	0.121	0.142	0.165	0.189	0.218	0.248	0.281	0.313	0.342	0.376
		50	0.129	0.159	0.226	0.309	0.404	0.506	0.591	0.680	0.750	0.807	0.851
		100	0.149	0.222	0.418	0.622	0.790	0.895	0.952	0.980	0.991	0.996	0.998
	0.8	20	0.111	0.121	0.143	0.170	0.196	0.226	0.254	0.288	0.322	0.356	0.393
		50	0.128	0.157	0.222	0.306	0.404	0.508	0.608	0.695	0.776	0.837	0.888
		100	0.150	0.222	0.423	0.628	0.802	0.912	0.966	0.989	0.996	0.998	1.000

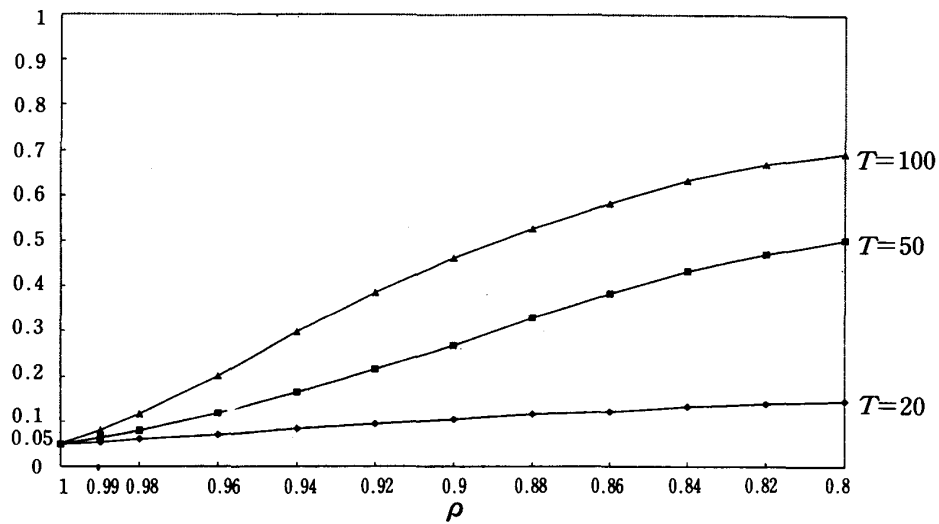


図6 $T(\hat{\rho}_{IV} - 1)$ の経験的検出力 ($\theta = -0.8$, $\alpha = 0.05$, $\sigma_e^2 = 1$)

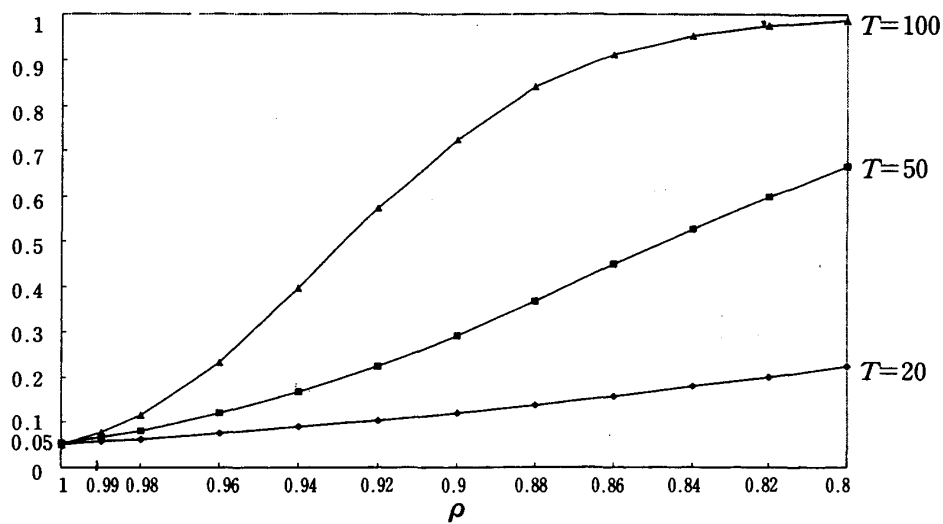


図7 $T(\hat{\rho}_{IV} - 1)$ の経験的検出力 ($\theta = 0$, $\alpha = 0.05$, $\sigma_e^2 = 1$)

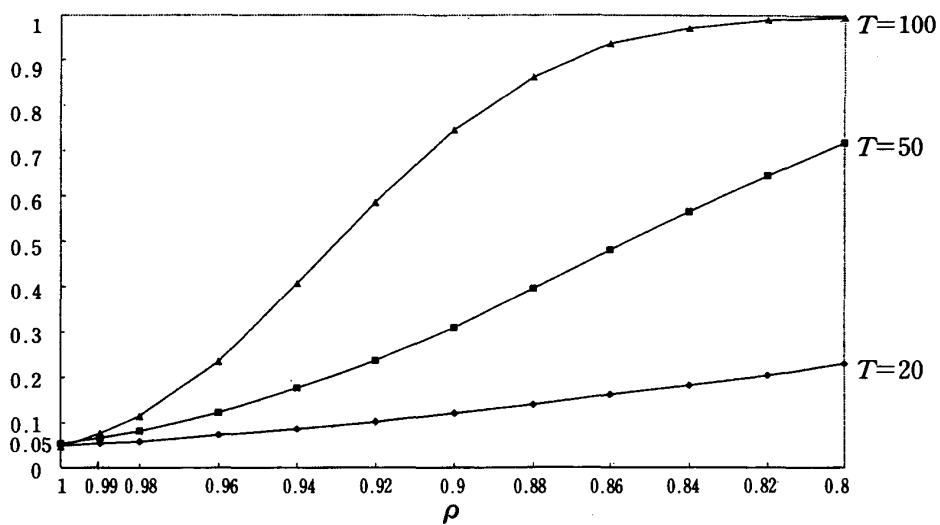


図8 $T(\hat{\rho}_{IV} - 1)$ の経験的検出力 ($\theta = 0.8$, $\alpha = 0.05$, $\sigma_e^2 = 1$)

に明らかになったように、 Δy_t が近似的 MA 単位根を持つ場合、 $T(\hat{\rho}_{IV} - 1)$ の経験的検出力は著しく低下することから、このような場合の検定方式には十分な注意が必要であることが分かるのである。

V おわりに

本稿では、帰無仮説が ARIMA(0,1,1) モデル、対立仮説が ARIMA(1,0,1) モデルで表わされる場合について、特に操作変数推定量 $\hat{\rho}_{IV}$ を用いた単位根検定量 $T(\hat{\rho}_{IV} - 1)$ を考え、小規模なモンテカルロシミュレーションを実施して、その経験的パーセント点と経験的検出力を数値的に求めた。その結果、特に Δy_t が近似的 MA 単位根を持つ場合に経験的検出力が他の場合と比較して著しく低下することが数値的に明らかになった。この数値結果は Phillips and Perron(1988), Hall(1989) 等の指摘と整合的である。

なお、本稿のシミュレーションは極めて限られたかつ小規模なものであり、数値積分による方法を含めて今後さらにより詳細な検討が必要であることは言うまでもない。今後同種の問題を含めてさらに考察する所存である。

参 考 文 献

- [1] DeJong, David N., Nankervis, John C., Savin, N. E. and Whiteman, Charles H. (1992), "The power problems of unit root tests in time series with autoregressive errors," *Journal of Econometrics*, 53, 323-343.
- [2] Hall, A.(1989), "Testing for a unit root in the presence of moving average errors," *Biometrika*, 76, 49-56.
- [3] Hall, A.(1992), "Joint hypothesis tests for a random walk based on instrumental variable estimators," *Journal of Time Series Analysis*, 13, 29-45.
- [4] Pantula, Sastry G. and Hall, A.(1991), "Testing for unit roots in autoregressive moving average models," *Journal of Econometrics*, 48, 325-353.
- [5] Phillips, P. C. B. and Perron, Pierre(1988), "Testing for a unit root in time series regression," *Biometrika*, 75, 335-346.

注釈

- 1) なお、本稿では扱わないが、上記 $T(\hat{\rho}_{IV} - 1)$ をもとにした所謂 "t 検定量" の極限分布は augmented Dickey-Fuller t 検定量や Phillips-Perron t 検定量の極限分布と一致し、
$$\frac{\int_0^1 w(r) dw(r)}{(\int_0^1 w(r)^2 dr)^{1/2}}$$
 で与えられる。